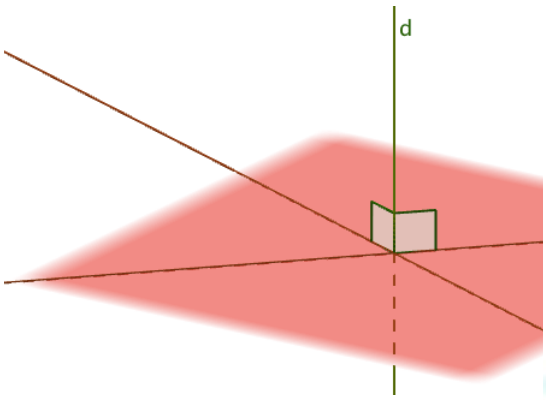
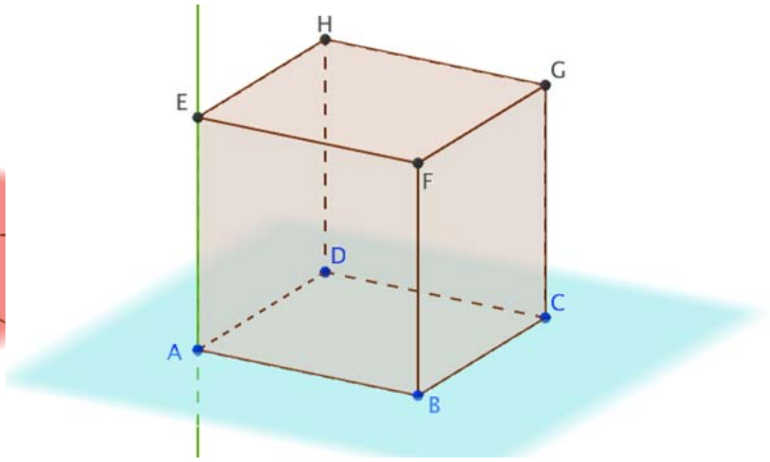
2) Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition : Une droite *d* est orthogonale ou perpendiculaire à un plan *P* si elle est orthogonale à deux droites sécantes de *P*.





Exemple :

ABCDEFGH est un cube.
(AE) est perpendiculaire aux droites (AD) et (AB).
(AB) et (AD) sont sécantes et définissent le plan (ABC).
Donc (AE) est orthogonal au plan (ABC).

Propriété : Si une droite *d* est orthogonale ou perpendiculaire à un plan *P* alors elle est orthogonale à toutes les droites de *P*.

Démonstration (exigible BAC) :

- Si une droite est orthogonale à toute droite d'un plan *P* alors elle est en particulier orthogonale à deux droites de *P*.

- Démontrons la réciproque :

Soit une droite (d) de vecteur directeur $\vec{n}$ orthogonale à deux droites (d_1) et (d_2) de *P* sécantes et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires et orthogonaux au vecteur $\vec{n}$.
Soit une droite quelconque (Δ) de *P* de vecteur directeur $\vec{w}$.
Démontrons que (Δ) est orthogonale à (d).
$\vec{w}$ peut se décomposer en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui constituent une base de *P* (car non colinéaires).
Il existe donc deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
Donc $\vec{w}.\vec{n} = x\vec{u}.\vec{n} + y\vec{v}.\vec{n} = 0$, car $\vec{n}$ est orthogonal avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Donc $\vec{n}$ est orthogonal au vecteur $\vec{w}$.
Et donc (d) est orthogonale à (Δ).

Propriété : Une droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}$ et un plan (P) de base $(\vec{v},\vec{w})$ sont perpendiculaires (ou orthogonaux) si, et seulement si, $\vec{u}.\vec{w} = 0$ et $\vec{v}.\vec{w} = 0$.

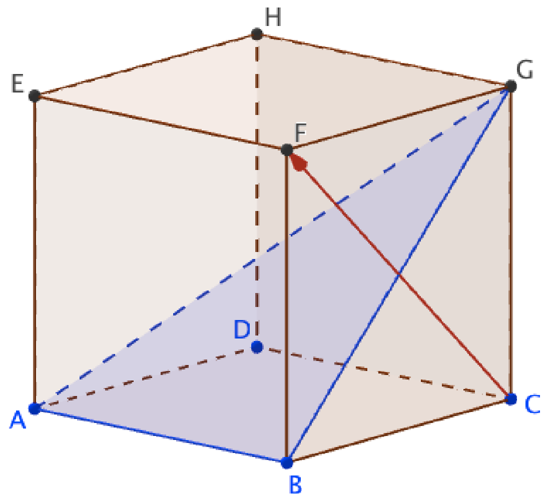
III. Vecteur normal à un plan

1) Définition et propriétés

Définition : Un vecteur directeur d'une droite perpendiculaire au plan (P) est appelé vecteur normal à (P).

<u>Méthode :</u> Déterminer si un vecteur est normal à un plan

ABCDEFGH est un cube.
Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CF}$ est normal au plan (ABG).



Il suffit de démontrer que $\overrightarrow{CF}$ est orthogonal à deux vecteurs de base du plan (ABG) par exemple $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{AB}$.
On considère le repère $\left(B;\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BF}\right)$.

Dans ce repère : $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, C\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, F\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, G\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

On a ainsi :

$\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$, donc : $\begin{array}{l}\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{BG}=0\times 0-1\times 1+1\times 1=0\\ \overrightarrow{CF}.\overrightarrow{AB}=0\times(-1)-1\times 0+1\times 0=0\end{array}$

Donc $\overrightarrow{CF}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABG), il est donc normal à (ABG).

<u>Méthode :</u> Déterminer un vecteur normal à un plan

Dans un repère orthonormé, soit $A\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}, B\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$.

Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}$.

Soit un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ normal au plan (ABC). Il est tel que :

$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}$ soit $\begin{cases}-2a+b+3c=0\\ a-2b=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\times 2b+b+3c=0 \\ a=2b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3b+3c=0 \\ a=2b \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c=b \\ a=2b \end{cases}$

Prenons par exemple, $b=1$ alors $c=1$ et $a=2$.

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est donc normal au plan (ABC).

Propriété 1 : Deux plans sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

Propriété 2 : Une droite D de vecteur directeur $\vec{u}$ et un plan P de vecteur normal $\vec{n}$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}\,.\,\vec{n}$ =0.

Propriété 3 : Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM}.\ \vec{u}=0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

2) Equation cartésienne d'un plan

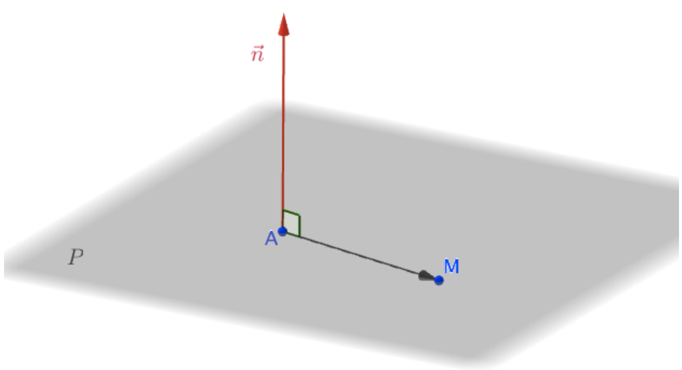
Théorème : L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Un plan P de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ non nul admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+cz+d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$.

Réciproquement, si a, b et c sont non tous nuls, l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $ax+by+cz+d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$, est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Démonstration (exigible BAC) :

- Soit un point $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ de *P*.



$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$

$\Leftrightarrow a\left(x-x_A\right)+b\left(y-y_A\right)+c\left(z-z_A\right)=0$

$\Leftrightarrow ax+by+cz-ax_A-by_A-cz_A=0$

$\Leftrightarrow ax+by+cz+d=0$ avec $d=-ax_A-by_A-cz_A$.

- Réciproquement, supposons par exemple que $a\neq 0$ (a, b et c sont non tous nuls).

On note *E* l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ vérifiant l'équation $ax+by+cz+d=0$

Alors le points $A\left(-\frac{d}{a};0;0\right)$ vérifie l'équation $ax+by+cz+d=0$.

Et donc $A\in$ *E.*

Soit un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. Pour tout point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, on a :

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=a\left(x+\frac{d}{a}\right)+b\left(y-0\right)+c\left(z-0\right)=ax+by+cz+d=0$.

E est donc l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$.

Donc l'ensemble *E* est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

<u>Exemple :</u>

Le plan d'équation cartésienne $x-y+5z+1=0$ a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}$.

<u>Méthode :</u> Déterminer une équation cartésienne de plan

Dans un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne du plan *P* passant par le point $A\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$.

Une équation cartésienne de *P* est de la forme $3x-3y+z+d=0$.

Le point A appartient à *P* donc ses coordonnées vérifient l'équation : $3\times\left(-1\right)-3\times 2+1+d=0$ donc $d=8$.

Une équation cartésienne de *P* est donc $3x-3y+z+8=0$.

<u>Méthode :</u> Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan

Dans un repère orthonormé, le plan *P* a pour équation $2x-y+3z-2=0$.

Soit $A\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$.

1) Démontrer que la droite (AB) et le plan *P* sont sécants.
2) Déterminer leur point d'intersection.

1) Un vecteur normal de *P* est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

(AB) et *P* sont sécants si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas orthogonaux. (propriété 2)

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$

Comme $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=-2\times2+3\times3=5\neq0$, on conclut que (AB) et le plan *P* ne sont pas parallèles et donc sécants.

2) Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$\begin{cases}x=1-2t\\y=2\\z=-3+3t\end{cases}$ avec t réel.

Le point $M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ intersection de (AB) et de *P* vérifie donc le système suivant :

$$\begin{cases}x=1-2t\\y=2\\z=-3+3t\\2x-y+3z-2=0\end{cases}$$

On a donc $2(1-2t)-2+3(-3+3t)-2=0$

$5t-11=0$ soit $t=\frac{11}{5}$.

D'où $\begin{cases}x=1-2\times\frac{11}{5}=-\frac{17}{5}\\y=2\\z=-3+3\times\frac{11}{5}=\frac{18}{5}\end{cases}$

Ainsi la droite (AB) et le plan *P* sont sécants en $M\left(-\frac{17}{7};2;\frac{18}{5}\right)$.

Méthode : Déterminer l'intersection de deux plans

Dans un repère orthonormé, les plans *P* et *P* ' ont pour équations respectives $-x+2y+z-5=0$ et $2x-y+3z-1=0$.

1) Démontrer que les plans *P* et *P'* sont sécants.

2) Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection *d*.

1) *P* et *P'* sont sécants si leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires. (propriété1)

Un vecteur normal de *P* est $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ et un vecteur normal de *P'* est $\vec{n}'\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

Les coordonnées des deux vecteurs ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

2) Le point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de *d*, intersection de *P* et de *P'*, vérifie donc le système suivant :

$$\begin{cases} -x+2y+z-5=0 \\ 2x-y+3z-1=0 \end{cases}$$

On choisit par exemple x comme paramètre et on pose $x=t$. On a alors :

$$\begin{cases} x=t \\ -t+2y+z-5=0 \\ 2t-y+3z-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ z=-2y+t+5 \\ -y+3z=1-2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ z=-2y+t+5 \\ -y+3(-2y+t+5)=1-2t \end{cases}$$

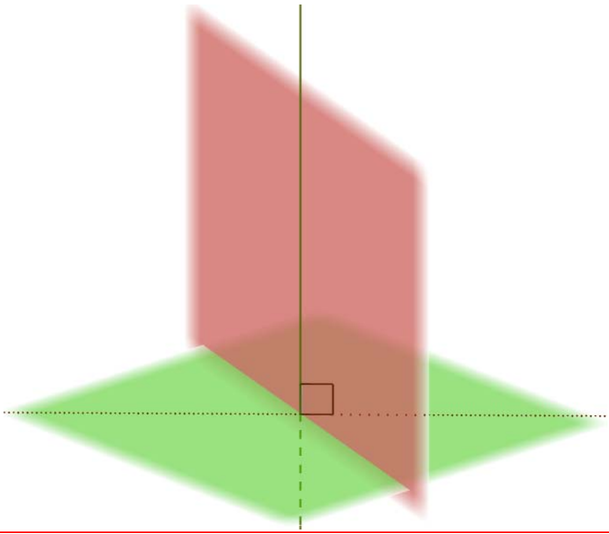
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ z=-2y+t+5 \\ -y-6y+3t+15=1-2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ z=-2y+t+5 \\ -7y=-14-5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=2+\frac{5}{7}t \\ z=-2\left(2+\frac{5}{7}t\right)+t+5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=2+\frac{5}{7}t \\ z=1-\frac{3}{7}t \end{cases}$$

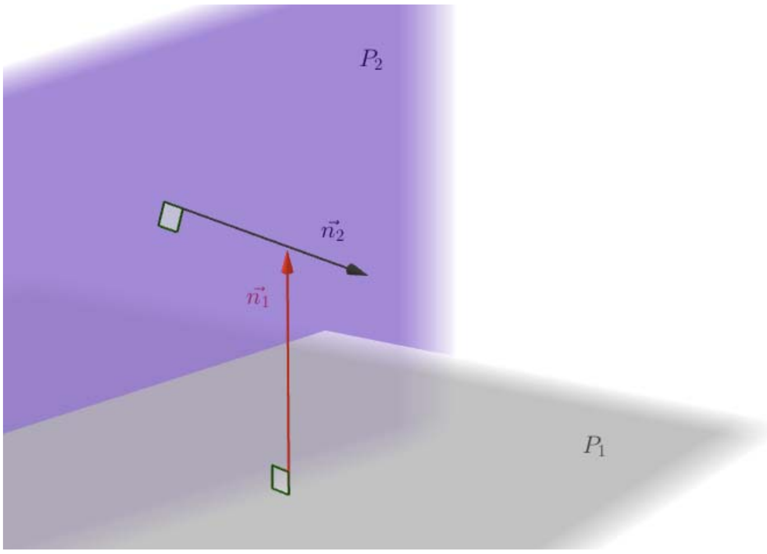
Ce dernier système est une représentation paramétrique de *d*, **avec** $t \in \mathbb{R}$.

3) Plans perpendiculaires

Définition : Deux plans sont perpendiculaires lorsque l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre plan.



Propriété : Deux plans sont perpendiculaires lorsqu'un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.



Méthode : Démontrer que deux plans sont perpendiculaires

Dans un repère orthonormé, les plans *P* et *P'* ont pour équations respectives $2x+4y+4z-3=0$ et $2x-5y+4z-1=0$.
Démontrer que les plans *P* et *P'* sont perpendiculaires.

Les plans *P* et *P'* sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

Un vecteur normal de *P* est $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$ et un vecteur normal de *P'* est $\vec{n}'\begin{pmatrix}2\\-5\\4\end{pmatrix}$.

$\vec{n}.\vec{n}'=2\times2+4\times(-5)+4\times4=0$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux donc les plans *P* et *P'* sont perpendiculaires

Vous pouvez faire les exercices 71, 81, 86, 92, 102, 103p276,277,278
Le sujet commenté p 286