NOMBRES COMPLEXES partie1

I – Nombre complexe

1) Définitions et notations

☆ On admet l'existence d'un nombre imaginaire i tel que $\boxed{i^2 = -1}$.

☆ Tout nombre de la forme x + i y, où x et y sont deux réels, est appelé nombre complexe.

L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

2) Forme algébrique

☆ L'écriture d'un nombre complexe z sous la forme z = x + i y, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, est appelé **forme algébrique** de z.

☆ Soit z = x + i y, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$,
x est appelé **partie réelle** de z notée Re(z).
y est appelé **partie imaginaire** de z notée Im(z).

$z \in \mathbb{C}$
☆ $z = 0 \Leftrightarrow$ ………………………………………………

☆ Soient deux nombres complexes z et z'.
$z = z' \Leftrightarrow$ ………………………………………………

☆ $z \in \mathbb{C}$, **z imaginaire pur** $\Leftrightarrow$………………………………………
☆ $z \in \mathbb{C}$, **z réel** $\Leftrightarrow$……………………………………….

3) Conjugué

Soit z = x + i y, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.
On appelle **conjugué de z**, noté $\bar{z}$, le nombre complexe défini par : $\bar{z} = x - iy$.

II – Calculer avec les nombres complexes

1) Somme et produit

On effectue la somme et le produit de nombres complexes en appliquant les propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$ et en remplaçant i^2 par -1.

Les propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que celles de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$.

Attention, on ne peut pas comparer des nombres complexes.

2) Quotient

Soient z un nombre complexe non nul et z' un nombre complexe. Pour obtenir $\frac{1}{z}$ et $\frac{z'}{z}$ sous la forme algébrique, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué de z.

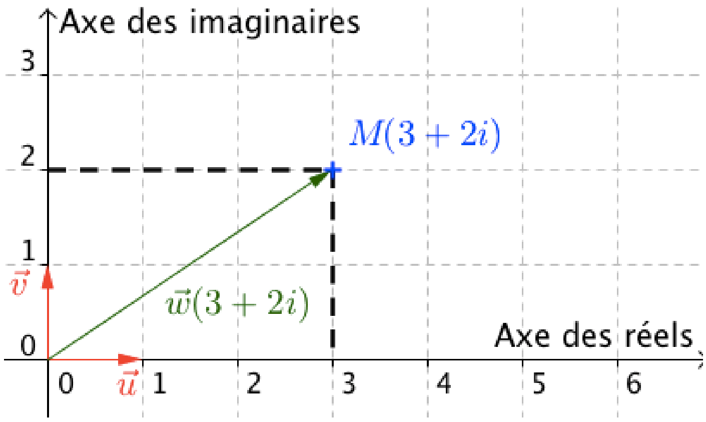
III- Représentation dans le plan complexe

Dans tout le chapitre, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Définitions : a et b sont deux nombres réels.
- A tout nombre complexe $z = a + ib$ on associe le point M de coordonnées (a ; b) et le vecteur $\vec{w}$ de coordonnées (a ; b).
- A tout point M (a ; b) et à tout vecteur $\vec{w}$ (a ; b), on associe le nombre complexe $z = a + ib$ appelé affixe du point M et affixe du vecteur $\vec{w}$.

On note M(z) et $\vec{w}$(z).

Exemple :
Le point M(3 ; 2) a pour affixe le nombre complexe z = 3+2i.
De même, le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe z = 3+2i..



Propriétés : M(z_M)et N(z_N) sont deux points du plan.
$\vec{u}$ (z) et $\vec{v}$(z') sont deux vecteurs du plan.
a) Le vecteur $\overline{MN}$ a pour affixe $z_N - z_M$.
b) Le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour affixe z+z'.
c) Le vecteur k$\vec{u}$, k réel, a pour affixe kz.
d) I milieu de [MN] a pour affixe $\frac{z_M + z_N}{2}$

VI – Equations du second degré à coefficients réels et variable complexe

L'équation az² + bz + c = 0, où a, b et c sont des réels (avec a $\neq$ 0) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions (éventuellement confondues).
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation. Δ est un nombre réel.
Si on pose $\Delta = \delta^2$ (avec δ réel lorsque $\Delta \geq 0$ et δ imaginaire pur si $\Delta < 0$),
Les solutions sont alors $z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$

Le trinôme $az^2 + bz + c$ peut alors se factoriser sous la forme $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.
Quand $\Delta < 0$ les deux solutions sont des nombres complexes conjugués.

V- Conjugué d'un nombre complexe

1) Définition

Soit z = x + i y, x $\in \mathbb{R}$ et y $\in \mathbb{R}$.
On appelle **conjugué de z**, noté $\bar{z}$, le nombre complexe défini par : $\bar{z} = x - iy$.

2) Propriétés algébriques

❖ Pour tout nombre complexe z, en posant $z = x + iy$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$ et $z - \overline{z} = 2\,i\,\mathrm{Im}(z)$
- $z \times \overline{z} = x^2 + y^2$
- z réel $\Leftrightarrow$ $z = \overline{z}$
- z imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $\overline{z} = -z$

❖ Pour tous nombres complexes z et z' et pour tout entier relatif n non nul

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $z \neq 0, \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$
- $z \neq 0, \overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$
- $z \neq 0, \overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$

IV- Module d'un nombre complexe

1) Définition

Soit le nombre complexe z de forme algébrique a + bi et soit M le point d'affixe z.
On appelle module de z le nombre réel positif r = OM = $\sqrt{a^2 + b^2}$
On note r = | z |

Conséquence :

Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B, on a **AB = | zB - zA |**.

2) Propriétés algébriques

Pour tous nombres complexes z et z' et pour tout entier relatif n non nul

$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; $|-z| = |z|$; $|\overline{z}| = |z|$; $|zz'| = |z|.|z'|$

si $z' \neq 0$ on a $\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{|z'|}$; $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ et $|z|^n = |z^n|$

$z\overline{z} = |z|^2$.