

Consigne pour les exercices **1** à **9** :

Dans chaque cas, calculer la dérivée de la fonction f définie par l'expression donnée.

1 Formule $(u+v)' = u' + v'$

$$f(x) = x - 2 ; f(x) = \frac{3}{4} + x^2 ; f(x) = \frac{1}{x} + x ; f(x) = x^6 + x^4 ; f(x) = x^2 + x - 5.$$

2 Formule $(ku)' = ku'$

$$f(x) = 3x ; f(x) = \frac{3}{4}x^2 ; f(x) = -2x^3 ; f(x) = \frac{x^2}{10} ; f(x) = \frac{3x}{5} ; f(x) = -\frac{3}{x} ; f(x) = -\frac{1}{2x} ; f(x) = 4\sqrt{x}.$$

Indications :

Pour certaines fonctions, on est obligé de faire une réécriture de l'expression afin de pouvoir appliquer la formule $(ku)' = ku'$.

Pour $f(x) = \frac{x^2}{10}$, écrire $f(x) = \frac{1}{10} \times x^2$.

Pour $f(x) = \frac{3x}{5}$, écrire $f(x) = \frac{3}{5} \times x$.

Pour $f(x) = -\frac{3}{x}$, écrire $f(x) = -3 \times \frac{1}{x}$.

Pour $f(x) = -\frac{1}{2x}$, écrire $f(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{x}$.

3 Dérivées de fonctions polynômes ; utilisation simultanée des 2 formules $(u+v)' = u' + v'$ et

$$(ku)' = ku'$$

$$f(x) = 2x^2 - x + 3 ; f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1 ; f(x) = -x^2 + 3x - 1 ; f(x) = 2x - 3 ; f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - \frac{1}{2}x + 7.$$

4 Dérivée d'un produit $(uv)' = u'v + uv'$

$f(x) = (3x^2 - 2x + 7)(x - 1)$ (ne pas développer $f(x)$ avant de dériver la fonction mais donner le résultat sous forme développée réduite)

$f(x) = (2x + 1)\sqrt{x}$ (donner le résultat sous forme d'un seul quotient ; laisser la racine carrée au dénominateur).

5 Dérivée de l'inverse d'une fonction ; utilisation de la formule $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1} \text{ (ne pas développer le dénominateur dans le résultat).}$$

6 Dérivée d'un quotient (fonction rationnelle) ; utilisation de la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$$f(x) = \frac{3x - 2}{x + 3} ; f(x) = \frac{x^2 + 2x - 6}{x - 1} \text{ (ne pas développer les dénominateurs dans les résultats).}$$

~~**7 Dérivée de la puissance d'une fonction ; utilisation de la formule** $(u^n)' = nu' u^{n-1}$~~

~~$$f(x) = (x^2 - x + 2)^2 ; f(x) = (x^3 + 5x^2 - 1)^5 \text{ (ne pas développer les résultats).}$$~~

~~**8 Dérivée de l'inverse de la puissance d'une fonction ; utilisation de la formule** $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$~~

~~$$f(x) = \frac{1}{(2x - 1)^2} ; f(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^3}.$$~~

9 Dérivée de fonctions utilisant des réécritures $\left(\frac{k}{u} \text{ et } \frac{u}{k}\right)$

$f(x) = \frac{3}{x^2 + 2}$ (avant de dériver, faire une réécriture de $f(x)$ sous la forme $f(x) = 3 \times \dots$; ne pas développer le dénominateur dans le résultat)

$f(x) = \frac{-x^2 + 3x + 1}{3}$ (faire une réécriture de $f(x)$ sous la forme $f(x) = \frac{1}{3} \times \dots$; ne pas développer le dénominateur)

$f(x) = \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x + 3}$ (ne pas mettre l'expression initiale au même dénominateur avant de dériver la fonction ; ne pas mettre le résultat au même dénominateur)

~~$$f(x) = \frac{3}{(x^2 - 1)^4}$$~~

$$f(x) = \frac{1}{2(x - 1)}$$

10 On considère la fonction f définie par $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ et l'on note $\mathbf{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f'(x)$.

2°) Déterminer les coordonnées du point de $\mathbf{C}$ en lequel la tangente a pour coefficient directeur 1.

On conclura ainsi :

« La courbe $\mathbf{C}$ admet une tangente de coefficient directeur 1 au point A(.... ;). »

3°) Déterminer les coordonnées du point de $\mathbf{C}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite Δ d'équation réduite $y = 3x + 5$.

11 On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f'(x)$.

2°) Déterminer les coordonnées des points de $\mathcal{C}$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite Δ d'équation réduite $y = 4x$.

12 On considère la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f'(x)$.

2°) Déterminer a, b, c sachant que $\mathcal{C}$ vérifie les hypothèses (conditions) suivantes

H_1 : $\mathcal{C}$ passe par l'origine du repère O .

H_2 : $\mathcal{C}$ passe par le point $A(1; -3)$.

H_3 : la tangente en O à $\mathcal{C}$ a pour équation réduite $y = -4x$.

13 On considère la fonction f définie par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f'(x)$.

2°) Déterminer a, b, c, d sachant que $\mathcal{C}$ vérifie les hypothèses (conditions) suivantes.

H_1 : $\mathcal{C}$ coupe l'axe (Oy) au point d'ordonnée 20.

H_2 : $\mathcal{C}$ passe par le point $A(-1; 18)$.

H_3 : $\mathcal{C}$ admet une tangente en A de coefficient directeur 3.

H_4 : $\mathcal{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

14 On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{ax^2 + b}{3x - 2}$ et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Calculer $f'(x)$.

2°) Déterminer a et b sachant que $\mathcal{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point $A(0; 1)$ et admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

15 On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

~~Déterminer l'ensemble de définition de f .~~

~~Calculer $f'(x)$ en précisant le domaine de validité du calcul.~~

16 Dans chaque cas, on donne l'expression d'une fonction f et l'on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point A indiqué.

1°) $f(x) = \frac{2x+5}{x^2+x+1}$; A est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 1.

2°) $f(x) = \frac{x^2-x-1}{x^2+1}$; A est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse -1 .

3°) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{x}$; A est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse 4.

4°) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$; A est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $\frac{1}{2}$.

Corrigé

Indication : pour tous les calculs de dérivées, on peut vérifier les résultats à l'aide du logiciel *XCas* (logiciel de calcul formel).

Pour les exercices **1** à **3**, on laisse les résultats à l'état brut en simplifiant au minimum.

On n'écrit pas les formules utilisées ; en revanche, on laisse les « traces » des formules utilisées.

On pourra parler (à l'oral mais pas à l'écrit) de la « forme de base » ou de la « forme originale » de la fonction pour déterminer.

Les exercices **1** à **9** sont classés par formules afin de faciliter la mise en pratique.

1 Formule $(u+v)' = u' + v'$

Réponses : $f'(x) = 1$; $f'(x) = 2x$; $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1$ (ne pas mettre au même dénominateur) ;

$$f'(x) = 6x^5 + 4x^3 ; f'(x) = 2x + 1.$$

Solution détaillée :

★ $f(x) = x - 2$

Version au brouillon :

On pose $u(x) = x$ et $v(x) = -2$.

On a donc $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 0$ (car v est une fonction constante).

$$f'(x) = 1 - 0$$
$$= 1$$

La dérivée ne dépend pas de x ce qui est normal car f est une fonction affine.

Le fait d'écrire $f'(x) = 1 - 0$ n'est pas forcément idiot : on a une trace écrite montrant la formule utilisée.

★ $f(x) = \frac{3}{4} + x^2$

Version au brouillon :

On pose $u(x) = \frac{3}{4}$ et $v(x) = x^2$.

On a donc $u'(x) = 0$ et $v'(x) = 2x$ (car v est une fonction constante).

$$f'(x) = 2x$$

★ $f(x) = \frac{1}{x} + x$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1$$

On laisse le résultat sous cette forme, sans chercher à mettre au même dénominateur.

★ $f(x) = x^6 + x^4$

$$f'(x) = 6x^5 + 4x^3$$

On ne peut pas aller plus loin. Il est même saugrenu de se poser la question.

★ $f(x) = x^2 + x - 5$

$$f'(x) = 2x + 1$$

2 Formule $(ku)' = ku'$

Réponses : $f'(x) = 3$; $f'(x) = \frac{3}{2}x$; $f'(x) = -6x^2$; $f'(x) = \frac{x}{5}$; $f'(x) = \frac{3}{5}$; $f'(x) = \frac{3}{x^2}$; $f'(x) = \frac{3}{2x^2}$;

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

On montre la réécriture utilisée.

Solution détaillée :

★ $f(x) = 3x$

$$f'(x) = 3 \times 1$$
$$= 3$$

★ $f(x) = \frac{3}{4}x^2$

$$f'(x) = \frac{3}{4} \times 2x$$
$$= \frac{3}{2}x$$

$$\star f(x) = -2x^3$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2 \times 3x^2 \\ &= -6x^2 \end{aligned}$$

$$\star f(x) = \frac{x^2}{10}$$

$$f(x) = \frac{1}{10}x^2 \quad (\text{on « démembre » ou on sépare »})$$

Avec cette nouvelle écriture, on peut appliquer la formule de dérivée de $(ku)' = ku'$ avec $k = \frac{1}{10}$ et $u : x \mapsto x^2$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{10} \times 2x \\ &= \frac{x}{5} \end{aligned}$$

$$\star f(x) = \frac{3x}{5}$$

$$f(x) = \frac{3}{5}x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{5} \times 1 \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\star f(x) = -\frac{3}{x}$$

$$f(x) = -3 \times \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3 \times \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= \frac{3}{x^2} \quad (\text{on remet le } -3 \text{ « dessus » ; les deux signes } - \text{ se neutralisent}) \end{aligned}$$

$$\star f(x) = -\frac{1}{2x}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= \frac{1}{2x^2} \end{aligned}$$

$$\star f(x) = 4\sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Dans cet exercice, on retiendra la méthode qui consiste à démembrer ou à séparer pour pouvoir appliquer la formule de dérivation de ku .

3 Dérivées de fonctions polynômes ; utilisation simultanée des 2 formules $(u+v)' = u' + v'$ et $(ku)' = ku'$

On utilise simultanément les deux formules $(u+v)' = u' + v'$ et $(ku)' = ku'$.

On applique les deux formules en même temps.

Réponses : $f'(x) = 4x - 1$; $f'(x) = 3x^2 + 3x$; $f'(x) = -2x + 3$; $f'(x) = 2$; $f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 8x - \frac{1}{2}$

Solution détaillée :

$$\star f(x) = 2x^2 - x + 3$$

$$f'(x) = 4x - 1$$

$$\star f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 3x$$

$$\star f(x) = -x^2 + 3x - 1$$

$$f'(x) = -2x + 3$$

$$\star f(x) = 2x - 3$$

$$f'(x) = 2$$

$$\star f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - \frac{1}{2}x + 7$$

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 8x - \frac{1}{2}$$

À partir de l'exercice **4**, on applique le principe de **calcul de « sous-dérivée »**.

4 Dérivée d'un produit $(uv)' = u'v + uv'$

Réponses : $f'(x) = 9x^2 - 10x + 9$; $f'(x) = \frac{6x+1}{2\sqrt{x}}$

Solution détaillée :

$$\star f(x) = (3x^2 - 2x + 7)(x - 1)$$

$$f'(x) = (6x - 2)(x - 1) + (3x^2 - 2x + 7) \times 1 \\ = 9x^2 - 10x + 9$$

$$\star f(x) = (2x + 1)\sqrt{x}$$

$$f'(x) = 2\sqrt{x} + (2x + 1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ = \frac{6x+1}{2\sqrt{x}} \quad (\text{On utilise l'égalité } a + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c})$$

On laisse la racine carrée au dénominateur.

5 Utilisation de la formule $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

$$f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2 + x + 1)^2} \quad (\text{on ne développe pas le carré présent au dénominateur : ce serait long et sans intérêt})$$

On ne fait rien pour le dénominateur.

Cours particulier avec Guillaume Berger le 12-12-2014

La formule $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ c'est une formule spéciale.

« Dans la formule $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$, le 1 on l'oublie complètement. »

On prend $x^2 + x + 1$.

On le dérivé et on met le dérivé en haut.

6 Utilisation de la formule $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Réponses : $f'(x) = \frac{11}{(x+3)^2}$; $f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{(x-1)^2}$

Solution détaillée :

$$\star f(x) = \frac{3x-2}{x+3}$$

$$f'(x) = \frac{3 \times (x+3) - (3x-2) \times 1}{(x+3)^2} \\ = \frac{3x+9-3x+2}{(x+3)^2} \\ = \frac{11}{(x+3)^2}$$

$$\star f(x) = \frac{x^2 + 2x - 6}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+2) \times (x-1) - (x^2 + 2x - 6) \times 1}{(x-1)^2} \\ = \frac{2x^2 - 2x + 2x - 2 - x^2 - 2x + 6}{(x-1)^2} \\ = \frac{x^2 - 2x + 4}{(x-1)^2}$$

brouillon :

$$u(x) = 3x - 2 \text{ donc } u'(x) = 3$$

$$v(x) = x + 3 \text{ donc } v'(x) = 1$$

brouillon :

$$u(x) = x^2 + 2x - 6 \text{ donc } u'(x) = 2x + 1$$

$$v(x) = x - 1 \text{ donc } v'(x) = 1$$

7 Utilisation de la formule $(u^n)' = nu' u^{n-1}$

Réponses : ~~$f'(x) = 2(2x-1)(x^2 - x + 2)$; $f'(x) = 5(3x^2 + 10x)(x^3 + 5x^2 - 1)^4$~~

Solution détaillée :

$$\star f(x) = (x^2 - x + 2)^2$$

$$f'(x) = 2(2x-1)(x^2 - x + 2)$$

~~On applique la formule avec $u(x) = x^2 - x + 2$ et $n = 2$.~~

~~On a : $u'(x) = 2x - 1$.~~

$$\star f(x) = (x^3 + 5x^2 - 1)^5$$

$$f'(x) = 5(3x^2 + 10x)(x^3 + 5x^2 - 1)^4$$

On applique la formule avec $u(x) = x^3 + 5x^2 - 1$ et $n = 5$.

$$\text{On a : } u'(x) = 3x^2 + 10x.$$

$$\boxed{8} \text{ Utilisation de la formule } \left(\frac{1}{u^n} \right)' = - \frac{nu'}{u^{n+1}}$$

$$\text{Réponses : } f'(x) = - \frac{4}{(2x-1)^3} ; f'(x) = - \frac{6x}{(x^2+1)^4}$$

Solution détaillée :

$$\star f(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x) = - \frac{2 \times 2}{(2x-1)^3} \quad (\text{sous-dérivée})$$

$$= - \frac{4}{(2x-1)^3}$$

$$\star f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3}$$

$$f'(x) = - \frac{3 \times 2x}{(x^2+1)^4} \quad (\text{sous-dérivée})$$

$$= - \frac{6x}{(x^2+1)^4} ;$$

$$\boxed{9} \quad f'(x) = - \frac{6x}{(x^2+2)^2} ; f'(x) = \frac{-2x+3}{3}$$

On effectue la réécriture suivante : $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+3} = \frac{1}{x-1} + 2 \times \frac{1}{x+3}$; on dérive ensuite terme à terme.

$$f'(x) = - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x+3)^2} ; f'(x) = - \frac{24x}{(x^2-1)^5} ; f'(x) = - \frac{1}{2(x-1)^2}.$$

Solution détaillée :

Dans cet exercice, on laisse les « marques » des formules utilisées.

$$\bullet f(x) = \frac{3}{x^2+2} = 3x \frac{1}{x^2+2}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction rationnelle.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x \left[- \frac{2x}{(x^2+2)^2} \right]$$

$$= - \frac{6x}{(x^2+2)^2} \quad (\text{on ne développe pas le dénominateur})$$

$$\bullet f(x) = \frac{-x^2+3x+1}{3} = \frac{1}{3}(-x^2+3x+1)$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynôme.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{1}{3}(-2x+3)$$

$$= \frac{-2x+3}{3}$$

$$= -\frac{2}{3}x+1$$

$$\bullet f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+3} = \frac{1}{x-1} + 2 \times \frac{1}{x+3}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1; -3\}$$

On modifie l'expression initiale de la fonction f avant de dériver afin de dériver plus simplement.

f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1; -3\}$ comme fonction rationnelle.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1; -3\} \quad f'(x) = - \frac{1}{(x-1)^2} + 2 \times \left[- \frac{1}{(x+3)^2} \right]$$

$$f'(x) = - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x+3)^2} \quad (\text{on ne développe pas les dénominateurs})$$